

## ДО ІМОВІРНІСНОГО ОПИСУ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ МАКСИМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ КЛІМАТИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ НА БУДІВЕЛЬНІ КОНСТРУКЦІЇ

Філімоніхін Г.Б., д.т.н., професор,  
Пашинський М.В., аспірант,  
*Кіровоградський національний технічний університет*  
filonalone@gmail.com

**Анотація.** Закон розподілу Гумбеля, який зазвичай використовується для імовірнісного опису послідовностей максимальних значень кліматичних навантажень, має нескінченну область визначення та певну імовірність реалізації від'ємних значень, фізично неможливих для навантажень. На прикладі даних українських метеостанцій проаналізована придатність законів розподілу максимальних значень чотирьох типів для опису снігового та вітрового навантажень. Встановлено, що для імовірнісного опису вибірок максимальних значень кліматичних навантажень при коефіцієнтах варіації до 0,85...1,0 доцільно використовувати закон розподілу максимумів першого типу (розподіл Гумбеля), а при більших значеннях коефіцієнтів варіації – закон розподілу третього типу (розподіл Вейбулла).

**Ключові слова:** кліматичні навантаження, імовірнісна модель, послідовність максимальних значень, закон розподілу.

## К ВЕРОЯТНОСТНОМУ ОПИСАНИЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ МАКСИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КЛИМАТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК НА СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Филимонихин Г.Б., д.т.н., профессор,  
Пашинский Н.В., аспирант,  
*Кировоградский национальный технический университет*  
filonalone@gmail.com

**Аннотация.** Закон распределения Гумбеля, который обычно используется для вероятностного описания последовательностей максимальных значений климатических нагрузок, имеет бесконечную область определения и определенную вероятность реализации отрицательных значений, физически невозможных для нагрузок. На примере данных украинских метеостанций проанализирована применимость законов распределения максимальных значений четырех типов для описания снеговой и ветровой нагрузок. Установлено, что для вероятностного описания выборок максимальных значений климатических нагрузок при коэффициентах вариации до 0,85...1,0 целесообразно использовать закон распределения максимумов первого типа (распределение Гумбеля), а при больших значениях коэффициентов вариации – закон распределения третьего типа (распределение Вейбулла).

**Ключевые слова:** климатические нагрузки, вероятностная модель, последовательность максимальных значений, закон распределения.

# TO PROBABILISTIC DESCRIPTION OF THE SEQUENCES OF MAXIMUM VALUES OF CLIMATIC LOADS ON BUILDING CONSTRUCTIONS

Filimonikhin G.B., Doctor of Engineering, Professor,  
Pashynskyi M.V., P.G.,

Kirovograd national technical university  
filonalone@gmail.com

**Abstract:** The Gumbel distribution, which is usually used to describe the probability of sequences of maximum values of climatic loads, has an infinite domain. It makes the probability of realization of negative values, which are physically impossible for climatic loads. The purpose of work is to analyze the known laws of distribution of maximum values, to identify the limits and their management for probabilistic description of the maximum values sequences of climatic loads and impacts. The researches are performed by using the results of observations of wind and snow cover on 20 meteorological stations from different geographical regions of Ukraine. Using the Pearson's chi-squared test the suitability of distribution law of the maximum values of three types and truncated the Gumbel distribution are analyzed. By the model example of distribution with a wide range of the variation coefficients found that for probabilistic describe of maximum values row of climatic loads with variation coefficient up to 0.85...1.0 it is advisable to use the maxima distribution law of the first type (the Gumbel distribution), while higher values of variation coefficients requires the distribution law of the third type (the Weibull distribution).

**Keywords:** climatic loads, probabilistic model, maximum values sequence, distribution law.

**Вступ.** Традиційний спосіб визначення розрахункових і характеристичних значень змінних навантажень базується на їх поданні у вигляді послідовності максимальних значень. Як правило, розподіл максимальних значень описується подвійним експоненціальним законом розподілу Гумбеля. Ця модель дозволяє за простою процедурою визначати граничні розрахункові значення навантажень, що відповідають заданому періоду повторюваності.

**Аналіз останніх публікацій.** Придатність розподілу Гумбеля [1] до імовірнісного опису вибірок максимальних значень кліматичних навантажень і впливів аналізувалася в численних дослідженнях, результати яких узагальнені в [2]. В роботах [3, 4] показано, що розподіли річних і місячних значень швидкості вітру у більшості випадків задовільно описуються законом Гумбеля. Аналогічний висновок щодо розподілів річних максимумів ваги снігового покриву зроблено в дослідженнях [5, 6, 7]. Закон розподілу Гумбеля також використовувався в [8] для імовірнісного опису вибірок річних максимумів кліматичних навантажень на повітряні лінії електропередачі (вага ожеледі та тиск вітру на проводи, вкриті ожеледдю), хоча обґрунтування його придатності в цих документах відсутнє.

**Проблема** полягає у тому, що закон розподілу Гумбеля має нескінчену область визначення, яка дає певну імовірність появи від'ємних значень випадкової величини  $F(0)$ . При малих коефіцієнтах варіації вибірки максимумів  $V$  імовірність  $F(0)$  є невеликою, але зростання  $V$  призводить до збільшення імовірності реалізації від'ємних значень. Якщо при  $V=0,6$  імовірність  $F(0)=0,009$ , то при  $V=0,8$  розподіл Гумбеля дає  $F(0)=0,062$ , а при  $V=1,0$   $F(0)=0,132$ . Відомо [7], що коефіцієнти варіації розподілу річних максимумів снігового покриву в південних районах України дорівнюють  $V=0,8...1,0$ , а коефіцієнти варіації таких навантажень на повітряні лінії електропередачі як вага ожеледі та тиск вітру на проводи, вкриті ожеледдю, можуть бути значно більшими [8]. У цих випадках зростання імовірності від'ємних значень, які є фізично неможливими для навантажень на будівельні конструкції, може призвести до значних похибок визначення розрахункових значень цих навантажень на основі використання закону розподілу Гумбеля. Виявлений ефект спонукає проаналізувати відомі закони розподілу екстремальних значень та знайти межі їх придатності залежно від параметрів навантажень. Зокрема, слід приділити увагу законам розподілу, які мають область визначення  $0 < X < +\infty$  і тому не дають від'ємних значень.

**Мета роботи.** Проаналізувати відомі закони розподілу максимальних значень та встановити межі їх раціонального використання для імовірнісного опису послідовностей максимальних значень кліматичних навантажень і впливів.

**Об'єкти і результати дослідження.** Досліджені закони розподілу екстремальних значень, визначені в області додатних чисел, що відповідає фізичному смислу навантажень на будівельні конструкції. Перелік цих розподілів, аналітичні вирази інтегральної функції  $F(q)$  та густини  $f(q)$ , а також рівняння для визначення параметрів через математичне сподівання, коефіцієнт варіації чи стандарт наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Закони розподілу максимумів кліматичних навантажень

Закон розподілу	Функція і густина розподілу	Рівняння для визначення параметрів
Тип 1 (Гумбеля)	$F(Q) = \exp \left[ -\exp \left( \frac{\alpha - Q}{\beta} \right) \right] \quad (1)$ $f(Q) = \frac{1}{\beta} \exp \left[ \frac{\alpha - Q}{\beta} - \exp \left( \frac{\alpha - Q}{\beta} \right) \right] \quad (2)$	$\alpha = M - k_{\alpha} S; \quad \beta = k_{\beta} S \quad (3)$ $k_{\alpha} = 0,45 + 0,34 N^{-0,69};$ $k_{\beta} = 0,78 + 1,54 N^{-0,75} \quad (4)$
Тип 2	$F(q) = \exp \left[ -\left( \frac{q}{\beta} \right)^{-\alpha} \right] \quad (5)$ $f(q) = \frac{1}{\beta} \exp \left[ -\left( \frac{q}{\beta} \right)^{-\alpha} \right] \times \left[ \alpha \cdot \left( -\frac{q}{\beta} \right)^{-\alpha-1} \right] \quad (6)$	$1 + V^2 = \frac{\Gamma(1 - 2/\alpha)}{\Gamma^2(1 - 2/\alpha)} \quad (7)$ $M = \beta \cdot \Gamma(1 - 1/\alpha) \quad (8)$
Тип 3 (Вейбулла)	$F(q) = 1 - \exp(-\beta \times q^{\alpha}) \quad (9)$ $f(q) = \alpha \times \beta \times q^{\alpha-1} \times \exp(-\beta \times q^{\alpha}) \quad (10)$	$1 + V^2 = \frac{\Gamma(1 + 2/\alpha)}{\Gamma^2(1 + 2/\alpha)} \quad (11)$ $M = \frac{\Gamma(1 + 1/\alpha)^{\alpha}}{\beta} \quad (12)$
Зрізаний розподіл Гумбеля	$F(q) = C \times \exp \left[ -\exp \left( \frac{\alpha - q}{\beta} \right) \right] - C + 1 \quad (13)$ $f(q) = C \times \frac{1}{\beta} \exp \left[ \frac{\alpha - Q}{\beta} - \exp \left( \frac{\alpha - q}{\beta} \right) \right] \quad (14)$	$\begin{cases} \int_0^{\infty} f(q) dq = 1; \\ \int_0^{\infty} q \times f(q) dq = M; \\ \int_0^{\infty} q^2 \times f(q) dq - M^2 = S^2 \end{cases} \quad (15)$

Розподіл максимумів першого типу, або подвійний експоненціальний розподіл Гумбеля (1), (2) детально описаний в монографії [1]. Його параметри визначаються за формулами (3) через середнє значення  $M$  і стандарт  $S$  наявної вибірки максимумів обсягу  $N$ . Перехідні коефіцієнти  $k_{\alpha}$  та  $k_{\beta}$  можуть бути визначені з використанням таблиці [1], яка в [7] апроксимована формулами (4). В граничному випадку  $N \rightarrow \infty$  перехідні коефіцієнти стають рівними  $k_{\alpha} = 0,45$ ,  $k_{\beta} = 0,78$ , що спрощує формули (3). Розподіл Гумбеля має постійне значення коефіцієнта асиметрії  $A=1,14$ , а його форма визначається середнім і стандартом.

Розподіл максимумів другого типу (5), (6) визначений в області додатних чисел, що відповідає фізичній суті кліматичних навантажень. Згідно з [1], параметр  $\alpha$  визначається як корінь рівняння (7) через коефіцієнт варіації вибірки  $V$ , а параметр  $\beta$  обчислюється з формули (8). Тут і надалі через  $\Gamma(\dots)$  позначена гамма-функція. Аналіз форм густини розподілу (6) при показує, що збільшенні коефіцієнта варіації мода зміщується вліво, а густина розподілу в правій частині зростає, що й забезпечує відповідне зростання стандарту.

Розподіл екстремумів третього типу (9), (10), або розподіл Вейбулла, також визначений в області додатних чисел [1, 7]. Аналогічно розподілу другого типу, параметр  $\alpha$  визначається як корінь рівняння (11) через коефіцієнт варіації вибірки  $V$ , а параметр  $\beta$  обчислюється з формули (12). При коефіцієнтах варіації  $V < 1$  густина розподілу має пагорбоподібний вигляд, при чому з ростом  $V$  зростає правостороння асиметрія розподілу. При  $V = 1$  розподіл (9) вироджується в експоненціальний, а при  $V > 1$  ліва частина кривої густини розподілу зростає до нескінченості, асимптотично наближаючись до осі ординат.

Зрізаний розподіл Гумбеля (13), (14) є удосконаленим варіантом закону розподілу першого типу, розробленим авторами з метою усунення невідповідності нескінченної області визначення до фізичної неможливості виникнення від'ємних значень навантажень. Для цього область визначення розподілу Гумбеля обмежується знизу нулем, а імовірність реалізації від'ємних значень  $F(0)$  враховується у правій частині розподілу при  $q > 0$  коефіцієнтом  $C \geq 1$ , який урівноважує зрізану частину розподілу. Параметри зрізаного розподілу Гумбеля визначаються за методом моментів [9] як корені системи нелінійних рівнянь (15), яка в середовищі табличного процесора Excel реалізується за допомогою надбудови "Пошук рішення". Встановлено, що зрізаний розподіл Гумбеля (13) може мати коефіцієнти варіації в межах від нуля до одиниці. Збільшення коефіцієнта варіації призводить до розширення області під кривою густини розподілу та до зміщення моди розподілу вліво. При  $V \rightarrow 1$  мода приймає від'ємне значення і значимою лишається права частина кривої розподілу, яка нагадує експоненту з коефіцієнтом варіації  $V \rightarrow 1$ . Для опису розподілів максимальних значень навантажень з коефіцієнтами варіації  $V > 1$  зрізаний розподіл Гумбеля непридатний.

Придатність описаних законів розподілу для імовірнісного опису кліматичних навантажень проаналізована на прикладі вибірок річних максимумів ваги снігового покриву, швидкості та тиску вітру на 20-ти метеорологічних станціях, розташованих у різних районах України. Вибірki річних максимумів ваги снігового покриву сформовані за результатами снігомірних зйомок, вибірки річних максимумів швидкості вітру  $v$  – за результатами строкових спостережень, а відповідні значення вітрового тиску  $w$  отримані за відомою інженерною формулою  $w = 0,61v^2$ . Для обраних метеостанцій наявні досить довгі ряди метеорологічних спостережень, які дозволяють виконати необхідний статистичний аналіз.

Результати статистичної обробки показали, що коефіцієнти варіації річних максимумів ваги снігового покриву змінюються від 0,485 до 0,965, швидкості вітру – від 0,122 до 0,352, а вітрового тиску – від 0,237 до 0,684, охоплюючи досить широкий діапазон характеристик.

Аналіз відповідності описаних вище законів розподілу до реальних даних виконувався за критерієм узгодженості Пірсона [9]. Для цього обчислені статистичні характеристики кожної з 60-ти вибірок, а також збудовані їх гістограми розподілу з однаковими для усіх метеостанцій величинами інтервалів (100 Па для ваги снігового покриву, 2 м/с для швидкості вітру та 50 Па для вітрового тиску). За вибірковими значеннями статистики  $\chi^2$  критерію Пірсона встановлені рівні значимості, на яких даний закон розподілу не суперечить дослідним даним. В таблиці 2 вказані кількості вибірок, яким не суперечать проаналізовані закони розподілу на рівнях значимості  $\alpha = 0,05$  та  $\alpha = 0,01$ .

Таблиця 2 – Узагальнені результати перевірки узгодженості законів розподілу чотирьох типів з вибірками річних максимумів кліматичних навантажень

Навантаження і впливи	Кількості розподілів, що не суперечать вибіркам							
	на рівні значимості $\alpha=0,05$				на рівні значимості $\alpha=0,01$			
	тип 1	тип 2	тип 3	(13)	тип 1	тип 2	тип 3	(13)
Вага снігу	17	0	17	20	17	0	20	20
Тиск вітру	4	0	1	2	8	2	2	5
Швидкість вітру	13	4	3	11	16	6	6	13
Усі навантаження	34	4	21	33	41	8	28	38

Аналіз таблиці 2 дозволяє зробити такі висновки щодо узгодженості проаналізованих законів розподілу з дослідними даними:

- закон розподілу другого типу практично не узгоджується з дослідними даними і тому не може використовуватися для опису максимальних значень кліматичних навантажень;
- інші закони розподілу значно краще узгоджуються з даними по швидкості вітру, ніж з вітровим тиском, що обумовлено появою значної кількості "пустих" інтервалів у гістограмах вітрового тиску внаслідок квадратичного перетворення швидкості вітру;
- закон розподілу першого типу не суперечить переважній більшості даних по вазі снігового покриву та по швидкості вітру на рівнях значимості 0,05 та 0,01;
- закон розподілу третього типу задовільно узгоджується з вибірками річних максимумів ваги снігового покриву, які мають великі коефіцієнти варіації, та значно гірше – з даними по швидкості вітру, які характеризуються меншими коефіцієнтами варіації;
- зрізаний розподіл Гумбеля (13) дещо краще, ніж розподіл першого типу, узгоджується з вибірками ваги снігового покриву, які мають великі коефіцієнти варіації.

Виходячи з отриманих результатів, для імовірнісного опису вибірок річних максимумів ваги снігового покриву та швидкості вітру можна рекомендувати використання законів розподілу Гумбеля (тип 1) та Вейбулла (тип 3).

Порівняння розрахункових значень навантажень, обчислених за законами розподілу екстремумів типу 1 і типу 3, виконане на модельному прикладі, який включає 10 розподілів річних максимумів з математичними сподіваннями  $M = 100$  та стандартами  $S = 20, 40, \dots, 180, 200$ . Для обох законів обчислені параметри усіх 10 розподілів, що мають вказані вище математичні сподівання й стандарти, а також розрахункові значення навантажень для періодів повторюваності  $T = 20, 50, 100, 200, 500, 1000$  років за формулами:

$$Q(T) = \alpha - \beta \cdot \ln[-\ln(1 - 1/T)] \quad \text{– для розподілу першого типу (1);} \quad (16)$$

$$Q = \left( \frac{[-\ln(1/T)]}{\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{– для розподілу третього типу (9).} \quad (17)$$

В обох випадках розрахункові значення логарифмічно зростають при збільшенні періоду повторюваності та майже лінійно – при збільшенні коефіцієнта варіації навантаження. Визначальним параметром цих розрахунків є коефіцієнт варіації, величина якого  $0,2 \leq V \leq 2,0$  охоплює увесь можливий діапазон для розподілів вибірок максимальних значень кліматичних навантажень.

За результатами обчислень збудовані графіки на рисунку 1, де відображені відношення розрахункових значень, обчислених за розподілом третього типу (Вейбулла), до значень, обчислених за розподілом першого типу (Гумбеля), залежно від коефіцієнта варіації вибірки та періоду повторюваності розрахункового значення. Перший графік відповідає граничному випадку нескінченно великого обсягу вибірки екстремумів, а другий – реальному обсягу вибірки річних максимумів  $N = 50$ .

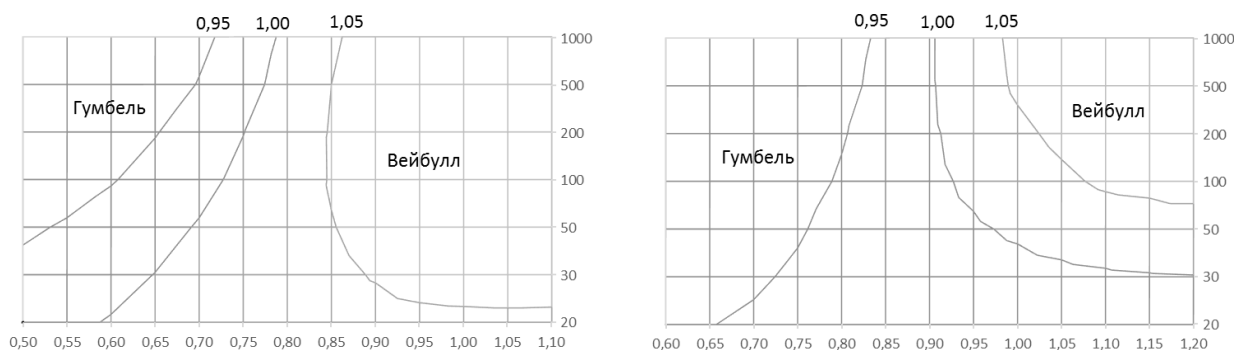


Рис. 1 Відхилення розрахункових значень, обчислених за розподілами Вейбулла та Гумбеля при обсягах вибірки  $N \rightarrow \infty$  та  $N = 50$ .

Попри дещо різний характер графіків, можна стверджувати, що при малих коефіцієнтах варіації розподіл Вейбулла дає менші розрахункові значення навантажень, ніж розподіл Гумбеля, а при великих коефіцієнтах варіації картина змінюється на протилежну.

Межі раціонального використання вказаних законів розподілу встановлені з умови забезпечення запасів надійності при визначенні розрахункових значень навантажень. Виходячи з цього критерію, на рисунках 2 позначені раціональні межі використання обох законів розподілу. Ізолінія зі значенням 1,00 відображає комбінації періодів повторюваності та коефіцієнтів варіації, при яких використання обох законів розподілу дає однакові значення навантажень. При відношеннях розрахункових значень, менших за 0,95 (ліва зона графіків), завжди слід використовувати закон розподілу Гумбеля, а при відношеннях, більших за 1,05 (права зона графіків) – закон розподілу Вейбулла. В межах ізоліній 0,95...1,05 з похибкою до 5% можна використовувати обидва закони розподілу. При реалізації комп'ютерних розрахунків можна також визначити необхідні розрахункові значення навантажень за обома законами розподілу та обрати більші з отриманих значень.

### **Висновки:**

1. Розподіл максимумів першого типу (подвійний експоненціальний розподіл Гумбеля) має область від'ємних значень, що суперечить фізичній суті навантажень на будівельні конструкції та при великих коефіцієнтах варіації призводить до похибок визначення розрахункових значень.
2. Аналіз відповідності чотирьох законів розподілу до дослідних даних 20-ти метеостанцій з різних районів України показав, що закон розподілу максимумів другого типу практично не узгоджується з дослідними даними; задовільно узгоджуються з дослідними даними розподіли Гумбеля та Вейбулла; усі закони розподілу значно краще узгоджуються з даними по швидкості вітру, ніж з вітровим тиском.
3. Для імовірного опису вибірок річних максимумів ваги снігового покриву та швидкості вітру при коефіцієнтах варіації, менших за 0,85...1,0, слід рекомендувати використання закону розподілу Гумбеля, а при більших значеннях коефіцієнтів варіації – закону розподілу Вейбулла.

### **Література**

1. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. - М.: Мир. - 1965. - 450 с.
2. Нагрузки и воздействия на здания и сооружения / А.В. Перельмутер, В.Н. Гордеев, А.И. Лантух-Лашенко, А.В.Махинько, В.А. Пашинский, С.Ф. Пичугин / Под общей ред. А.В. Перельмутера. – 4-е изд., перераб. – М.: Издательство СКАД СОФТ, издательство АСВ, издательство ДИЦМК Пресс, 2014. - 596 с.
3. Клепиков Л.В. О статистическом распределении скорости ветра // Металлические конструкции. - Труды МИСИ им. Куйбышева: Сб. 119. - М. - 1975. -С.31-40.
4. Симиу Э., Сканлан Л. Воздействие ветра на сооружения. - М.: Стройиздат. - 1984. - 358 с.
5. Розенберг Л.С. Статистическая оценка редкого максимума снеговых нагрузок // Надежность строительных конструкций: Межвузовский сборник научных трудов. - Куйбышев. - 1991. - С.40-42.
6. Пичугин С.Ф. Снеговые и гололедные нагрузки на строительные конструкции / С.Ф. Пичугин., А.В. Махинько. – Полтава: ООО "АСМИ", 2012. – 460 с.
7. Пашинський В.А. Атмосферні навантаження на будівельні конструкції на території України.- К.: УкрНДПроекстальконструкція, 1999.- 185 с.
8. Кліматичне забезпечення будівництва та експлуатації електричних мереж. Типова інструкція. — К.: Нормативний документ Мінпаливенерго України, 2008. — 26 с.
9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука. - 1969. – 576 с.